Kommutaattorit ja ryhmän abelisointi

LuK-tutkielma
Iikka Heikkilä
Opiskelijanumero: 2600204
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2021

Sisällys

Johdanto

Tutkielmassa käsitellään kommutaattoreita, kommutaattoriryhmää ja ryhmän abelisointia, samalla sivuten algebran yleisiä aiheita. Esitietoina tutkielmassa määritellään Abelin ryhmä, ryhmähomomorfismi ja isomorfismi, konjugaatio, normaali aliryhmä, tekijäryhmä, joukon generoima aliryhmä, esimerkki tekijäryhmästä ja lauseita liittyen esitiedoissa tarkasteltaviin aiheisiin.

Seuraavaksi määritellään kommutattorit, esitetään niille yksinkertaisia laskusääntöjä ja havainnollistetaan niitä permutaatioryhmään liittyvän esimerkin avulla.

Lopuksi määritellään kommutaattoriryhmä, tarkastellaan sen ominaisuuksia ja saadaan muodostettua ryhmän abelisointi. Tuodaan esille ryhmän abelisoinnin kommutatiivinen luonne ja tulkitaan sen merkitystä alkuperäisen ryhmän kannalta lauseen ja dihedraaliryhmään liittyvän esimerkin avulla.

Tutkielma on tehty pääosin lähteen [1] pohjalta. Osa esimerkeistä ja todistuksista on itse kehitettyjä.

1 Esitietoja

Määritelmä 1.1. Olkoon $(G, *)$ ryhmä. Mikäli

$$a * b = b * a \text{ kaikilla } a, b \in G,$$

niin $(G, *)$ on *Abelin ryhmä.*

Määritelmä 1.2. Olkoon G ja H ryhmiä ja kuvaus $f : G \to H$. Mikäli

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

kaikilla $a, b \in G$, niin kuvaus $f : G \to H$ on *ryhmähomomorfismi.* Mikäli ryhmähomomorfismi f on injektiivinen, sitä voidaan kutsua *monomorfismiksi*, ja mikäli se on surjektiivinen, sitä voidaan kutsua *epimorfismiksi*

Mikäli ryhmähomomorfismi $f : G \to H$ on bijektiivinen, sitä voidaan kutsua *isomorfismiksi.* Jos ryhmät G ja H ovat keskenään isomorfisia, eli on olemassa isomorfinen kuvaus $f : G \to H$, voidaan käyttää merkintää $G \cong H$.

Mikäli kaksi algebrallista rakennetta ovat keskenään isomorfiset, niillä voidaan ajatella olevan samat ominaisuudet. Isomorfisia rakenteita ei voida erottaa toisistaan tarkastelemalla pelkästään niiden rakenteita. Keskenään isomorfiset ryhmät voivat erota toisistaan esimerkiksi alkioiden nimien tai lisärakenteiden suhteen.

Määritelmä 1.3. Olkoon G ryhmä ja $x, y \in G$. Alkiot x ja y ovat toistensa konjugaatteja, jos on olemassa jokin $g \in G$ siten, että

$$y = g^{-1}xg.$$

Tämä on ekvivalenssirelaatio, jonka ekvivalenssiluokkia kutsutaan *konjugaattiluokiksi.* Kuvaus $x \to g^{-1}xg$ on isomorfismi, jota kutsutaan *konjugaatioksi alkion g suhteen.* Käytetään merkintää

$$x^g = g^{-1}xg.$$

[2]

Määritelmä 1.4. Olkoot G ryhmä ja $N \leq G$. Mikäli

$$gN = Ng$$

tai vastaavasti

$$g^{-1}Ng = N,$$

kaikilla $g \in G$, sanotaan, että N on ryhmän G **normaali aliryhmä**. Merkitään $N \trianglelefteq G$.

Operoitaessa normaaleilla aliryhmillä $N \trianglelefteq G$ voimme havaita seuraavasti: Olkoon $x, y \in G$. Muistetaan, että $Ng = gN$, kun $N \trianglelefteq G$ ja $g \in G$. Nyt

$$\begin{aligned}(Nx)(Ny) &= N(x(Ny)) = N((xN)y) \\ &= N((Nx)y) = N(N(xy)) = (NN)(xy) = Nxy.\end{aligned}$$

Koska $(Nx)(Ny) = Nxy$, aliryhmän N sivuluokkien tulo on aliryhmän N sivuluokka.

Olkoon G ryhmä, $N \trianglelefteq G$ sen normaali aliryhmä ja

$$G/N = \{gN | g \in G\}$$

normaalin aliryhmän N sivuluokkien muodostama joukko. Olkoon lisäksi $a, b, c \in G$. Osoitetaan, että G/N on ryhmä:

1. Nyt $aNbN = (ab)N$ ja $aN, bN, (ab)N \in G/N$ kaikilla $a, b, c \in G$. Näin ollen ryhmän operaatio on suljettu joukossa G/N.

2. Nyt
$$\begin{aligned}aN(bNcN) &= aN(bcN) = a(bc)N \\ &= (ab)cN = (ab)NcN = (aNbN)cN\end{aligned}$$
kaikilla $a, b, c \in G$, joten ryhmän G/N operaatio on assosiatiivinen.

3. On olemassa neutraalialkio $e = N \in G/N$ siten, että

$$e(aN) = (aN)e = aN$$

kaikilla $a \in G$, sillä

$$N(aN) = (e_G N)(aN) = (e_G a)N = aN,$$

joten

$$e(aN) = aN.$$

Samaan aikaan

$$(aN)N = (aN)(e_G N) = (ae_G N) = aN$$

kaikilla $a \in G$, joten myös

$$(aN)e = aN.$$

4. Jokaiselle $aN \in G/N$ on olemassa käänteisalkio $(aN)^{-1} = a^{-1}N$ siten, että

$$(aN)^{-1}(aN) = (aN)(aN)^{-1} = e$$

kaikilla $a \in G$, sillä

$$(a^{-1}N)(aN) = (a^{-1}a)N = eN = N,$$

joten

$$(aN)^{-1}(aN) = N = e.$$

Samalla

$$(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = N$$

kaikilla $a \in G$, joten myös

$$(aN)(aN)^{-1} = N = e.$$

Määritelmä 1.5. Olkoon $N \trianglelefteq G$ ja normaalin aliryhmän N sivuluokkien muodostama joukko $G/N = \{gN | g \in G\}$. Ryhmää G/N kutsutaan ryhmän G *tekijäryhmäksi* normaalin aliryhmän N suhteen. Huomioitavaa on, että joukon G/N elementit ovat joukon G osajoukkoja. Lisäksi luonnollinen kuvaus $\pi : G \to G/N$ on surjektiivinen, joten kuvausta ryhmältä sen tekijäryhmään voidaan kutsua *epimorfismiksi*.

Esimerkki 1.6. Olkoon $G = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, $(+)$ sen operaatio ja $N = \{0\} \times \mathbb{Z}_n$ $= \{(0,0), ...(0, n-1)\}$ sen aliryhmä. Nyt G on Abelin ryhmä, joten kaikki sen aliryhmät ovat normaaleja, eli nyt $N \trianglelefteq G$.

Normaalin aliryhmän N sivuluokat gN ovat muotoa:

$$\{(0,0), ..., (0, n-1)\} = (0,0) + N,$$

$$\{(1,0), ..., (1, n-1)\} = (1,0) + N,$$

$$\vdots$$

$$\{(m-1,0), ..., (m-1, n-1)\} = (m-1,0) + N,$$

joten tekijäryhmäksi saadaan

$$G/N = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}_n = \{N, (1,0) + N, (2,0) + N, ..., (m-1,0) + N\} \cong \mathbb{Z}_m.$$

Esimerkissä voidaan myös nähdä yksi tekijäryhmän ominaisuuksista, nimittäin tekijäryhmän kertaluku $|G/N| = \dfrac{|G|}{|N|}$. Tämä seuraa Langrangen lauseesta. (Ei sisälly tutkielmaan.) Esimerkissä ryhmien kertaluvut $|G| = |\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n| = mn$, $|N| = |\{0\} \times \mathbb{Z}_n| = n$ ja $|G/N| = |Z_m| = m$.

Määritelmä 1.7. Olkoot G ryhmä, $X \subseteq G$ ja $S_X = \{H | H \leq G, X \subseteq H\}$. Merkitään

$$\langle X \rangle = \textstyle\bigcap_{H \in S_X} H.$$

Ryhmää $\langle X \rangle$ kutsutaan joukon X *generoimaksi aliryhmäksi*.

Lause 1.8. *Olkoot G ryhmä, $X \subseteq G$ ja $\langle X \rangle$ joukon X generoima aliryhmä. $\langle X \rangle$ on pienin sellaisista aliryhmistä $H \leq G$, joilla $X \subseteq H$.*

Todistus. Seuraa joukon generoiman aliryhmän määritelmästä.

$\square$

Lause 1.9. *Olkoon A kokoelma rymän G normaaleja aliryhmiä $N \trianglelefteq G$ ja olkoon $G' = \bigcap_{N \in A} N$. Nyt $G' \trianglelefteq G$.*

Todistus. Okoon G ryhmä ja olkoon $A = \{N_1, N_2, ...\}$ kokoelma ryhmän G normaaleja aliryhmiä. Osoitetaan, että $G' \leq G$, ja että $G' \trianglelefteq G$.

Olkoon $x, y \in N$ ja $N \in A$ mielivaltaisia. Nyt $xy \in N$ ja $x^{-1} \in N$, ja koska normaali aliryhmä $N \in A$ on mielivaltainen, niin $xy \in \bigcap_{N \in A} N$ ja $x^{-1} \in \bigcap_{N \in A} N$, ja näin ollen $\bigcap_{N \in A} N \leq G$.

Olkoon $n \in \bigcap_{N \in A} N$ ja $N \in A$ mielivaltaisia. Koska N on normaali, alkion n konjugaatti $g^{-1}ng \in N$ kaikilla $g \in G$. Näin ollen $g^{-1}ng \in \bigcap_{N \in A} N$, joten $g^{-1}(\bigcap_{N \in A} N)g \subseteq \bigcap_{N \in A} N$, ja normaaliuskriteetin nojalla $\bigcap_{N \in A} N \trianglelefteq G$. $\square$

2 Kommutaattorit

Määritelmä 2.1. Olkoon G ryhmä ja $x, y \in G$. Merkitään $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Alkiota $[x, y]$ kutsutaan alkioiden x ja y *kommutaattoriksi*.

Huomataan, että $xy = yx[x, y]$, joten $[x, y]$:n voidaan ajatella mittaavan x:n ja y:n kommutoinnin epäonnistumista. Huomataan lisäksi, että mikäli G on Abelin ryhmä, niin $[x, y] = e$ kaikilla $x, y \in G$.

Kootaan yksinkertaisia laskusääntöjä kommutaattoreille:

Lause 2.2. *Olkoon G ryhmä ja $x, y, z \in G$. Seuraavat yhtälöt ovat paikkansa pitäviä:*

1. $[x, y]^{-1} = [y, x]$,
2. $[x, y]^z = [x^z, y^z]$,
3. $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$,
4. $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$,
5. $[x, yz] = [x, z][x, y][x, y, z]$, *missä* $[x, y, z] = [[x, y], z]$.

Todistus. 1. Kommutaattorin määritelmän mukaan

$$xy = yx[x, y]$$

ja edelleen

$$yx[x, y] = xyy^{-1}x^{-1}yx[x, y] = xy[y, x][x, y].$$

Nyt

$$xy = xy[x, y][y, x],$$

joten

$$[y, x] = [x, y]^{-1}.$$

2. Nyt
$$[x,y]^z = z^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz$$
ja samaan aikaan
$$[x^z,y^z] = z^{-1}x^{-1}zz^{-1}y^{-1}zz^{-1}xzz^{-1}yz$$
$$= z^{-1}x^{-1}(zz^{-1})y^{-1}(zz^{-1})x(zz^{-1})yz = z^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz,$$
joten
$$[x,y]^z = [x^z,y^z].$$

3. Nyt
$$xyz = (xy)z = z(xy)[xy,z] = (zx)y[xy,z] = (xz[z,x])y[xy,z]$$
$$= xzy(y^{-1}[z,x]y)[xy,z] = x(zy)[z,x]^y[xy,z] = x(yz[z,y])[z,x]^y[xy,z]$$
$$= xyz[z,y][z,x]^y[xy,z].$$
Koska,
$$xyz = xyz[z,y][z,x]^y[xy,z],$$
niin
$$[z,y][z,x]^y[xy,z] = 1.$$
Kohdan 1. perusteella
$$[z,y]^{-1} = [y,z] \text{ ja } ([z,x]^y)^{-1} = [x,z]^y,$$
joten
$$[xy,z] = [x,z]^y[y,z].$$

4. Kohdan 3. perusteella
$$[yz,x] = [y,x]^z[z,x]$$
ja kohdan 1. perusteella
$$[x,yz] = ([y,x]^z[z,x])^{-1} = [x,z][x,y]^z.$$

5. Nyt
$$xyz = yx[x,y]z = yxz[x,y][x,y,z] = yzx[x,z][x,y][x,y,z].$$
Samalla
$$xyz = yzx[x,yz],$$
joten
$$[x,yz] = [x,z][x,y][x,y,z].$$
$\square$

Esimerkki 2.3. Olkoon $G = \{e, a, b, ab, ba, aba\}$ permutaatioryhmä, missä
$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad ba = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad aba = bab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
ja käänteisalkiot
$$a^{-1} = a, \quad b^{-1} = b, \quad (ab)^{-1} = ba, \quad (ba)^{-1} = ab, \quad (aba)^{-1} = aba = bab.$$

Nyt esimerkiksi:

1. Kommutaattorin määritelmän mukaan
$$ab = ba[a,b],$$
missä kommutaattori
$$[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab,$$
ja näin ollen
$$ab = baa^{-1}b^{-1}ab = ab.$$

2. Kommutaattorin käänteisalkio
$$[a,b]^{-1} = (a^{-1}b^{-1}ab)^{-1} = (abab)^{-1} = (ab)^{-1}ab^{-1} = baba = b^{-1}a^{-1}ba = [b,a].$$
(Vertaa : $[x,y]^{-1} = [y,x]$.)

3.

$$[a, ba] = a^{-1}(ba)^{-1}aba = aab(aba) = aabbab = a^{-1}ab^{-1}bab = ab$$

ja samaan aikaan

$$[a, a][a, b]^a = ea^{-1}(a^{-1}b^{-1}ab)a = b^{-1}aba = baba = b(aba) = ab,$$

joten $[a, ba] = [a, a][a, b]^a$. (Vertaa: $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$.)

3 Kommutaattoriryhmä ja ryhmän abelisointi

Määritelmä 3.1. Oletetaan, että G on ryhmä ja olkoon A kokoelma, joka sisältää ryhmän G kaikki sellaiset normaalit aliryhmät N, joilla G/N on Abelin ryhmä. Nyt

$$G' = \bigcap_{N \in A} N$$

on joukon G *kommutaattoriryhmä.*

Lause 3.2. *Olkoon G ryhmä ja G' sen kommutaattoriryhmä. Tästä seuraa, että*

1. $G' \trianglelefteq G$,
2. G/G' *on Abelin ryhmä,*
3. $G' = \langle g^{-1}h^{-1}gh | g, h \in G \rangle$.

Todistus. 1. Määritelmän 3.1 mukaan G' on leikkaus ryhmän G normaaleja aliryhmiä. Nyt Lauseen 1.9 nojalla G' on ryhmän G normaali aliryhmä.

2. Olkoon $N \trianglelefteq G$ ja G/N Abelin ryhmä. Olkoon $g, h \in G$. Nyt

$$Ng^{-1}h^{-1}gh = Ng^{-1}Nh^{-1}NgNh.$$

Koska $Nh^{-1}, Ng \in G/N$ ja G/N on Abelin ryhmä, saadaan

$$\begin{aligned} Ng^{-1}Nh^{-1}NgNh &= Ng^{-1}NgNh^{-1}Nh \\ &= Ng^{-1}gh^{-1}h = N. \end{aligned}$$

Päästään siis lopputulokseen: $Ng^{-1}h^{-1}gh = N$, joten $g^{-1}h^{-1}gh \in N$ kaikilla $g, h \in G$. Koska normaali aliryhmä $N \trianglelefteq G$, jolla G/N on Abelin ryhmä, on mielivaltainen, ja kommutaattoriryhmä G' on leikkaus kyseisen ehdon täyttäviä normaaleja aliryhmiä, niin kommutaattori $g^{-1}h^{-1}gh \in G'$ kaikilla $g, h \in G$.

Siispä $G'g^{-1}h^{-1}gh = G'$. Nyt

$$\begin{aligned} & G'g^{-1}h^{-1}gh = G' \\ \iff \ & G'g^{-1}h^{-1} = G'h^{-1}g^{-1}, \end{aligned}$$

joten $G'gh = G'hg$.

Nyt $G'gG'h = G'hG'g$ kaikilla $g, h \in G$, misää $G'g$ ja $G'h$ ovat tekijäryhmän G/G' alkioita, joten G/G' on Abelin ryhmä.

3. Olkoon $X = \langle g^{-1}h^{-1}gh | g, h \in G \rangle$. Kohdan 2. mukaan $g^{-1}h^{-1}gh \in G'$ kaikilla $g, h \in G$, joten $\{g^{-1}h^{-1}gh | g, h \in G\} \subseteq G'$, siispä $X \leq G'$.

   Olkoon $z \in G$. Nyt

$$\begin{aligned} & \{g^{-1}h^{-1}gh | g, h \in G\}^z \\ = & \{(g^z)^{-1}(h^z)^{-1}g^z h^z | g, h \in G\} \\ = & \{g^{-1}h^{-1}gh | g, h \in G\}. \end{aligned}$$

   Koska aliryhmän X generoiva joukko konjugoi itsensä kanssa ja $X \leq G$, siitä seuraa, että $X \trianglelefteq G$.

   Nyt $g^{-1}h^{-1}gh \in X$ ja $Xg^{-1}h^{-1}gh = X$. Saadaan $Xgh = Xhg$ kaikilla $g, h \in G$, joten tekijäryhmä G/X on Abelin ryhmä.

   Kommutaattoriryhmän G' määritelmästä seuraa, että koska $X \trianglelefteq G$ ja G/X on Abelin ryhmä, niin $G' \leq X$, jonka lisäksi $X \leq G'$, joten $X = G'$ eli $G' = \langle g^{-1}h^{-1}gh | g, h \in G \rangle$. Voidaan käyttää myös muotoa $G' = \langle [g, h] | g, h \in G \rangle$.

$\square$

Esimerkki 3.3. Ryhmää G/G' kutsutaan ryhmän G abelisoinniksi. Huomataan, että jos G on Abelin ryhmä, niin $G' = \{e\}$ ja $G/G' \cong G$.
Jos G on niin sanottu *täydellinen ryhmä*, eli sen kommutaattoriryhmä $G' = G$, tai vastaavasti sillä ei ole yhtäkään epätriviaalia kommutatiivista tekijäryhmää, eli ryhmän abelisointi $G/G' \cong \{e\}$.

Määritelmän 3.1 mukaan kommutaattoriryhmä G' on leikkaus kokoelmasta normaaleja aliryhmiä $N \trianglelefteq G$ ja Lauseen 1.8 nojalla G' on myös pienin kyseisen kokoelman normaaleista aliryhmistä. Tämä taas viittaa siihen, että G/G' olisi suurin ryhmän G kommutatiivisista tekijäryhmistä. Havainnoidaan ajatusta seuraavalla lauseella:

Lause 3.4. *Olkoon G ryhmä ja $\pi : G \to G/G'$ epimorfismi. Olkoon $\theta : G \to H$ ryhmähomomorfismi ja sen kuva $Im\theta$ kommutatiivinen. Näistä seuraa, että on olemassa yksiselitteinen ryhmähomomorfismi $\hat{\theta} : G/G' \to H$ siten, että $\hat{\theta} \circ \pi = \theta$.*

Todistus. Sivuutetaan. □

Lauseen todistusta ei sisällytetä tähän tutkielmaan, mutta voimme tarkastella lausetta pintapuolisesti. Epimorfismi $\pi : G \to G/G'$ edustaa tässä tilanteessa ryhmän kuvautumista sen tekijäryhmäksi kommutaattoriryhmänsä suhteen ja epimorfismin merkitys voidaan tulkita siten, että ryhmän abelisointi on kooltaan ryhmää pienempi tai yhtäsuuri.

Esimerkki 3.5. Olkoon $D_n = \{e, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., se^{n-1}\}$ dihedraaliryhmä, missä r kuvastaa rotaatiota ja s peilausta.

Dihedraaliryhmä D_n on siis n-kulmaisen säännöllisen monikulmion symmetriaryhmä, jolle pätee muunmuassa $r^n = e$, $s^2 = e$ ja $sr = r^{n-1}s$. Dihedraaliryhmä ei ole kommutatiivinen, kun $n \geq 3$.

Huomataan, että alkioiden s ja r kommutaattori

$$[s, r] = s^{-1}r^{-1}sr = s^{-1}r^{n-1}sr = s^{-1}srr = r^2$$

ja näin ollen $D_n' = \langle r^2 \rangle$. Huomataan myös, että $g^{-1}\langle r^2 \rangle g = \langle r^2 \rangle$ kaikilla $g \in D_n$, joten $\langle r^2 \rangle \trianglelefteq D_n$.

Muodostetaan dihedraaliryhmän abelisointi $D_n/\langle r^2 \rangle$ molemmille tapauksille, n on pariton ja n on parillinen.

1. Kun n on pariton, niin
   kommutaattoriryhmä

   $$\langle r^2 \rangle = \{e, r, r^2, ..., r^{n-1}\}$$

   ja sivuluokat

   $$e\langle r^2 \rangle, r\langle r^2 \rangle, r^2\langle r^2 \rangle, ..., r^{n-1}\langle r^2 \rangle = \langle r^2 \rangle$$

   ja

   $$s\langle r^2 \rangle, sr\langle r^2 \rangle, sr^2\langle r^2 \rangle, ..., sr^{n-1}\langle r^2 \rangle = s\langle r^2 \rangle,$$

   joten dihedraaliryhmän abelisointi $D_n/\langle r^2 \rangle = \{g\langle r^2 \rangle | g \in D_n\} = \{\langle r^2 \rangle, s\langle r^2 \rangle\}$ $\cong \mathbb{Z}_2$, kun n on pariton.

   Nyt $\langle r^2 \rangle s\langle r^2 \rangle = s\langle r^2 \rangle = s\langle r^2 \rangle\langle r^2 \rangle$, joten $D_n/\langle r^2 \rangle$ on Abelin ryhmä, kun n on pariton.

2. Kun n on parillinen, niin
   kommutaattoriryhmä

   $$\langle r^2 \rangle = \{e, r^2, r^4, ...r^{n-2}\}$$

   ja sivuluokat

   $$e\langle r^2 \rangle, r^2\langle r^2 \rangle, r^4\langle r^2 \rangle, ..., r^{n-2}\langle r^2 \rangle = \langle r^2 \rangle,$$

$$r\langle r^2\rangle, r^3\langle r^2\rangle, ..., r^{n-1}\langle r^2\rangle = r\langle r^2\rangle,$$
$$s\langle r^2\rangle, sr^2\langle r^2\rangle, sr^4\langle r^2\rangle, ..., sr^{n-2}\langle r^2\rangle = s\langle r^2\rangle,$$

ja

$$sr\langle r^2\rangle, sr^3\langle r^2\rangle, ..., sr^{n-1}\langle r^2\rangle = sr\langle r^2\rangle,$$

joten $D_n/\langle r^2\rangle = \{\langle r^2\rangle, r\langle r^2\rangle, s\langle r^2\rangle, sr\langle r^2\rangle\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, kun n on parillinen.

Nyt $r\langle r^2\rangle s\langle r^2\rangle = rs\langle r^2\rangle = sr\langle r^2\rangle = s\langle r^2\rangle r\langle r^2\rangle$, joten $D_n/\langle r^2\rangle$ on Abelin ryhmä, kun n on parillinen. [2]

Lähdeluettelo

[1] G. Smith, O.Tabachnikova: Topics in Group Theory, Springer-Verlag, London, 2000

[2] M.A. Armstrong: Groups and Symmetry, Springer-Verlag, New York, 1988